ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΛΥΜΕΝΕΣ & ΑΛΥΤΕΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Επιμέλεια: Γ. Π. Βαξεβάνης (Γ. Π. Β.)

(Μαθηματικός)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν για να βοηθήσουν αποτελεσματικά τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου στο δύσκολο έργο τους. Οι σημειώσεις περιέχουν βασικές λυμένες ασκήσεις που καλύπτουν όλες τις κατηγορίες ασκήσεων των μιγαδικών αριθμών, καθώς και άλυτες προτεινόμενες ασκήσεις (με τις απαντήσεις) όλων των επιπέδων, με αυξανόμενο βαθμό δυσκολίας. Από τη θέση αυτή ευχαριστώ τους φίλους και συναδέλφους μου για την πολύτιμη βοήθειά τους στη συγγραφή των σημειώσεων αυτών. Κάθε πρόταση-παρατήρηση που σκοπό έχει τη βελτίωση των σημειώσεων αυτών με χαρά θα γίνει δεκτή.

Γ. Π. Β

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΑ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση: $z+2\overline{z}=6$

Λύση:

Θέτουμε $z=x+yi$ με x, y πραγματικούς και αντικαθιστούμε στην εξίσωση:

$x+yi+2(x-yi)=6 \Leftrightarrow 3x-yi=6 \Leftrightarrow$

$3x+(-y)i=6+0i \Leftrightarrow$

$3x=6$ και $-y=0$

$x=2$ και $y=0 \rightarrow$ Άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι ο $z=2$.

2. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $z^2+4z+5=0$.

Λύση:

Αρχικά υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου: Δ=...=-4<0.

Άρα οι λύσεις δίνονται από τη θεωρία: $z_{1,2}=\dfrac{-4\pm i\sqrt{-(-4)}}{2}=-2\pm i$.

3. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $z^2+2\overline{z}-3=0$.

<u>Λύση:</u>

Στην εξίσωση θέτουμε $z=x+yi$ οπότε έχουμε:

$(x+yi)^2+2(x-yi)-3=0 \Leftrightarrow x^2+2xyi-y^2+2x-2yi-3=0 \Leftrightarrow$

$x^2-y^2+2x-3+(2xy-2y)i=0+0i \Leftrightarrow$

$x^2-y^2+2x-3=0$ (1) και $2y(x-1)=0$ (2)

Από την (2) προκύπτει ότι: $y=0$ ή $x=1$

Για $y=0$ έχουμε (1)$\Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x=1$ ή $x=-3$

Άρα προκύπτουν δύο λύσεις: $z_1=1$ και $z_2=-3$.

Για $x=1$ έχουμε (1)$\Rightarrow -y^2=0 \Rightarrow y=0$

Άρα προκύπτει $z_3=1$.

4. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $z^4(\overline{z})^2=1$.

<u>Λύση:</u>

$z^4(\overline{z})^2=1 \Rightarrow \left|z^4(\overline{z})^2\right|=1 \Leftrightarrow \left|z^4\right|\left|(\overline{z})^2\right|=1 \Leftrightarrow |z|^4|\overline{z}|^2=1 \Leftrightarrow$

$\overset{|z|=|\overline{z}|}{\Leftrightarrow} |z|^6=1 \Leftrightarrow |z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{1}{z}$

Αντικαθιστούμε στην αρχική εξίσωση και έχουμε:

$z^4\left(\dfrac{1}{z}\right)^2=1 \Leftrightarrow z^2=1 \Leftrightarrow z=\pm 1$

5. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $iz^2+(1+i)z+1=0$.

<u>Λύση:</u>

❖ Α τρόπος

Έχουμε ότι:

$$iz^2+(1+i)z+1=0 \Leftrightarrow iz^2+z+iz+1=0 \Leftrightarrow iz(z+1)+(z+1)=0$$

$$(iz+1)(z+1)=0 \Leftrightarrow z_1=-1 \text{ ή } z_2=-\frac{1}{i}=i$$

❖ Β τρόπος

Θέτουμε $z=x+yi$ οπότε έχουμε:

$$i(x+yi)^2+(1+i)(x+yi)+1=0 \Leftrightarrow i(x^2+2xyi-y^2)+x+yi+xi-y+1=0 \Leftrightarrow$$

$$(-2xy+x-y+1)+(x^2-y^2+y+x)i=0 \Leftrightarrow (-2xy+x-y+1)+(x+y)(x-y+1)i=0 \Leftrightarrow$$

$$-2xy+x-y+1=0 \ (1) \text{ και } (x+y)(x-y+1)=0 \ (2)$$

Από την (2) προκύπτει ότι: $y=-x$ ή $y=x+1$

Για $y=-x$ έχουμε (1) $\Rightarrow 2x^2+2x+1=0$ (αδύνατη)

Για $y=x+1$ έχουμε (1) $\Rightarrow \ldots \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=-1$

Άρα οι λύσεις είναι οι μιγαδικοί $z_1=i$ και $z_2=-1$.

- ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

6. Αν είναι γνωστό ότι $z^2 - z + 1 = 0$ τότε να δείξετε ότι $z^3 = -1$ και να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $z^{2003} + \dfrac{1}{z^{2003}}$.

<u>Λύση:</u>

Έχουμε ότι:

$$z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2 - z + 1) = 0 \Leftrightarrow \qquad \longrightarrow (\alpha^3 \pm \beta^3 = (\alpha \pm \beta)(\alpha^2 \mp \alpha\beta + \beta^2))$$

$$\Leftrightarrow z^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^3 = -1$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή της δοθείσας παράστασης θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση που δείξαμε: $z^3 = -1$.

Έχουμε ότι:

$$z^{2003} = z^{3\cdot 667+2} = z^{3\cdot 667} z^2 = (z^3)^{667} z^2 = (-1)^{667} z^2 = -z^2$$

Επομένως:

$$z^{2003} + \frac{1}{z^{2003}} = -z^2 - \frac{1}{z^2} = \frac{-z^4 - 1}{z^2} = \frac{-z^3 z - 1}{z^2} = \frac{z-1}{z^2} \overset{z^2 - z + 1 = 0}{=} \frac{z^2}{z^2} = 1$$

7. Αν τα σημεία Α(z_1), Β(z_2), Γ(z_3) ανήκουν σε κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1 και επιπλέον ισχύει ότι $z_1+z_2+z_3=0$, τότε να δείξετε ότι:

Α. $\overline{z}_1=\dfrac{1}{z_1}$, $\overline{z}_2=\dfrac{1}{z_2}$, $\overline{z}_3=\dfrac{1}{z_3}$

Β. $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$

Γ. $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$

Δ. $z_1^3=z_2^3=z_3^3=z_1z_2z_3$

<u>Λύση:</u>

Α. Από την εκφώνηση είναι γνωστό ότι: $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$

Επομένως έχουμε:

$$|z_1|=1\Leftrightarrow |z_1|^2=1\Leftrightarrow z_1\overline{z}_1=1\Leftrightarrow \overline{z}_1=\frac{1}{z_1}$$

Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτουν ότι: $\overline{z}_2=\dfrac{1}{z_2}$ και $\overline{z}_3=\dfrac{1}{z_3}$.

Β. Από τη δοθείσα σχέση έχουμε:

$$z_1+z_2+z_3=0\Leftrightarrow \overline{z_1+z_2+z_3}=0\Leftrightarrow \overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=0\Leftrightarrow \frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1z_2z_3}=0\Leftrightarrow z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$$

Γ. Θεωρούμε την ταυτότητα:

$$(z_1+z_2+z_3)^2=(z_1+z_2)^2+2(z_1+z_2)z_3+z_3^2\Leftrightarrow$$

$$(z_1+z_2+z_3)^2=z_1^2+z_2^2+z_3^2+2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$$

Δ. Έχουμε ότι:

$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0 \Leftrightarrow (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)\cdot z_3 = 0 \Leftrightarrow \qquad \rightarrow (\, z_3 \neq 0 \text{, επειδή } |z_3| = 1)$$

$$z_1z_2z_3 + z_2z_3^2 + z_1z_3^2 = 0 \Leftrightarrow z_1z_2z_3 + (z_1 + z_2)z_3^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 + z_2)z_3^2 = -z_1z_2z_3 \overset{z_1+z_2+z_3=0}{\Leftrightarrow} -z_3^3 = -z_1z_2z_3 \Leftrightarrow z_3^3 = z_1z_2z_3$$

Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτουν ότι:

$z_1^3 = z_1z_2z_3$ και $z_2^3 = z_1z_2z_3$

➢ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ & ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΙ

→ Βασικές Προτάσεις: $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ & $\overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in \mathrm{I}$

8. Αν $w = \dfrac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $z \neq \alpha i$, τότε να δείξετε ότι ο w είναι φανταστικός αριθμός αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός αριθμός.

<u>Λύση:</u>

Έχουμε διαδοχικά:

$$w \in \mathrm{I} \Leftrightarrow \overline{w} = -w \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+\alpha i}{iz+\alpha}\right)} = -\frac{z+\alpha i}{iz+\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\overline{z}-\alpha i}{-i\overline{z}+\alpha} = -\frac{z+\alpha i}{iz+\alpha} \Leftrightarrow (\overline{z}-\alpha i)(iz+\alpha) = -(-i\overline{z}+\alpha)(z+\alpha i) \Leftrightarrow$$

$$i|z|^2 + \alpha\overline{z} + \alpha z - \alpha^2 i = i|z|^2 - \alpha\overline{z} - \alpha z - \alpha^2 i \Leftrightarrow$$

$$\alpha\overline{z} + \alpha z = -\alpha\overline{z} - \alpha z \Leftrightarrow \overline{z} + z = -\overline{z} - z \Leftrightarrow \qquad \to (\alpha \neq 0)$$

$$2\overline{z} = -2z \Leftrightarrow \overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in \mathrm{I}$$

9. Να δειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ο αριθμός $z = (\lambda+i)^\nu + (\lambda-i)^\nu$ είναι πραγματικός.

<u>Λύση:</u>

$$\overline{z} = \overline{(\lambda+i)^\nu + (\lambda-i)^\nu} = \overline{(\lambda+i)^\nu} + \overline{(\lambda-i)^\nu} = (\overline{\lambda+i})^\nu + (\overline{\lambda-i})^\nu = (\lambda-i)^\nu + (\lambda+i)^\nu = z$$

Επομένως $z \in \mathbb{R}$.

➢ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

10. Να υπολογίσετε το παρακάτω άθροισμα:

$$\mathrm{A}=\frac{1}{i^{13}}+\frac{1}{i^{23}}+\frac{1}{i^{33}}+\frac{1}{i^{43}}$$

<u>Λύση:</u>

Έχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{A}=\frac{1}{i^{13}}+\frac{1}{i^{23}}+\frac{1}{i^{33}}+\frac{1}{i^{43}}=\frac{1}{i^{4\cdot 3+1}}+\frac{1}{i^{4\cdot 5+3}}+\frac{1}{i^{4\cdot 8+1}}+\frac{1}{i^{4\cdot 10+3}}=$$

$$\frac{1}{\left(i^4\right)^3\cdot i}+\frac{1}{\left(i^4\right)^5\cdot i^3}+\frac{1}{\left(i^4\right)^8\cdot i}+\frac{1}{\left(i^4\right)^{10}\cdot i^3}\overset{i^4=1}{=}\frac{1}{i}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^3}\overset{i^3=-i}{=}\frac{1}{i}-\frac{1}{i}+\frac{1}{i}-\frac{1}{i}=0$$

11. Να υπολογίσετε την παράσταση που ακολουθεί:

$$\mathrm{A}=(i+1)^{2012}-(i-1)^{2012}$$

<u>Λύση:</u>

Έχουμε: $(i+1)^2=i^2+2i+1=-1+2i+1=2i$ και $(i-1)^2=i^2-2i+1=-1-2i+1=-2i$

Επομένως:

$$\mathrm{A}=(i+1)^{2012}-(i-1)^{2012}=\left((i+1)^2\right)^{1006}-\left((i-1)^2\right)^{1006}=\left(2i\right)^{1006}-\left(-2i\right)^{1006}=$$

$$2^{1006}\cdot i^{1006}-\left(-2\right)^{1006}\cdot i^{1006}=2^{1006}\cdot i^{1006}-2^{1006}\cdot i^{1006}=0$$

➢ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

12. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας Μ(z) του μιγαδικού z όταν είναι γνωστό ότι: $\left|\frac{z-2i}{z+i}\right|=2$.

<u>Λύση:</u>

Παρατηρούμε ότι είναι $z \neq -i$. Άρα το σημείο Μ δεν μπορεί να είναι το (0,-1).

Θέτουμε $z=x+yi$ και έχουμε:

$$\left|\frac{z-2i}{z+i}\right|=2 \Leftrightarrow \left|\frac{x+yi-2i}{x+yi+i}\right|=2 \Leftrightarrow \frac{|x+(y-2)i|}{|x+(y+1)i|}=2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}=2 \Leftrightarrow \frac{x^2+(y-2)^2}{x^2+(y+1)^2}=4 \Leftrightarrow$$

$$x^2+(y-2)^2=4[x^2+(y+1)^2] \Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4=4x^2+4y^2+8y+4 \Leftrightarrow$$

$$3x^2+3y^2+12y=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+4y=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2\cdot 2y+4-4=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+(y+2)^2-4=0 \Leftrightarrow x^2+(y+2)^2=4 \Leftrightarrow x^2+(y+2)^2=2^2$$

Άρα το Μ κινείται σε κύκλο με κέντρο Κ(0,-2) και ακτίνα ρ=2. Ο κύκλος αυτός δεν περιλαμβάνει το σημείο (0,-1).

→ <u>Προσοχή στους περιορισμούς!</u> Αν το (0,-1) βρισκόταν πάνω στον κύκλο, τόπος δεν θα ήταν όλος ο κύκλος γιατί θα έπρεπε να εξαιρεθεί το σημείο (0,-1).

➢ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

13. Αν $z_1 z_2 \neq 0$ και $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$ να δείξετε ότι τα σημεία: O(0), A(z_1), B(z_2) είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

Λύση:

Αρκεί να δείξουμε ότι: OA=OB=AB.

Άρα πρέπει: $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|$.

Θέτουμε $w = \dfrac{z_1}{z_2}, \quad \longrightarrow (z_2 \neq 0)$

Τότε θέλουμε να δείξουμε:

$$|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_2|} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1 - z_2}{z_2}\right| = 1 \Leftrightarrow |w| = |w-1| = 1$$

Από τη δοθείσα σχέση έχουμε διαδοχικά:

$$z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2} = \frac{z_1 z_2}{z_2^2} \Leftrightarrow w^2 + 1 = w \Leftrightarrow w^2 - w + 1 = 0$$

Οι λύσεις του τριωνύμου είναι: $w_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Επομένως εύκολα επαληθεύεται ότι $|w| = |w-1| = 1$ που είναι το ζητούμενο.

<u>Εναλλακτικός τρόπος επίλυσης της άσκησης:</u>

Έχουμε ότι:

$$z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Leftrightarrow z_1^2 = z_1 z_2 - z_2^2 \Leftrightarrow z_1^2 = z_2(z_1 - z_2) \Leftrightarrow$$

$$|z_1^2| = |z_2(z_1 - z_2)| \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2||z_1 - z_2| \quad (1)$$

Αντίστοιχα έχουμε:

$$z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Leftrightarrow z_2^2 = z_1 z_2 - z_1^2 \Leftrightarrow z_2^2 = z_1(z_2 - z_1) \Leftrightarrow$$

$$|z_2^2| = |z_1(z_2 - z_1)| \Leftrightarrow |z_2|^2 = |z_1||z_2 - z_1| \Leftrightarrow |z_2|^2 = |z_1||z_1 - z_2| \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) με διαίρεση κατά μέλη ($z_2 \neq 0$, $\rightarrow |z_2| \neq 0$) έχουμε:

$$\frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} = \frac{|z_2||z_1 - z_2|}{|z_1||z_1 - z_2|} \Leftrightarrow \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} = \frac{|z_2|}{|z_1|} \Leftrightarrow |z_1|^3 = |z_2|^3 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$$

Από την (1) έχουμε:

$$|z_1|^2 = |z_2||z_1 - z_2| \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_1||z_1 - z_2| \Leftrightarrow |z_1| = |z_1 - z_2|$$

Επομένως αποδείχτηκε το ζητούμενο: $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|$.

➢ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

14. Να δείξετε ότι $|z_1+z_2|^2 \le (1+\lambda)|z_1|^2+(1+\frac{1}{\lambda})|z_2|^2$ για κάθε $\lambda>0$.

<u>Λύση:</u>

Αν $z_2=0$ η ανισότητα είναι προφανής $\to |z_1|^2<(1+\lambda)|z_1|^2$.

Έστω $z_2\neq 0$ τότε θέτουμε $w=\dfrac{z_1}{z_2}$ και έχουμε:

$$|z_1+z_2|^2 \le (1+\lambda)|z_1|^2+(1+\frac{1}{\lambda})|z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{|z_1+z_2|^2}{|z_2|^2} \le (1+\lambda)\frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}+(1+\frac{1}{\lambda})\frac{|z_2|^2}{|z_2|^2} \Leftrightarrow \left|\frac{z_1+z_2}{z_2}\right|^2 \le (1+\lambda)\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2+(1+\frac{1}{\lambda}) \Leftrightarrow$$

$$|w+1|^2 \le (1+\lambda)|w|^2+(1+\frac{1}{\lambda}) \Leftrightarrow \lambda|w+1|^2 \le \lambda(1+\lambda)|w|^2+\lambda+1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda|w|^2+\lambda^2|w|^2+\lambda+1-\lambda|w+1|^2 \ge 0 \Leftrightarrow |w|^2\lambda^2+(|w|^2-|w+1|^2+1)\lambda+1\ge 0 \quad (1)$$

Όμως είναι: $|w|^2-|w+1|^2+1=|w|^2-(w+1)(\overline{w}+1)+1=$

$$|w|^2-w\overline{w}-w-\overline{w}-1+1=|w|^2-|w|^2-(w+\overline{w})=-2\operatorname{Re}(w)$$

Επομένως η (1) γίνεται: $|w|^2\lambda^2-2\operatorname{Re}(w)\lambda+1\ge 0$

Για να ισχύει η παραπάνω ανίσωση, αρκεί η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι μη θετική.

Πράγματι έχουμε με $w=x+yi$: $\Delta=4x^2-4(x^2+y^2)=-4y^2\le 0$

Εναλλακτικός τρόπος επίλυσης της άσκησης:

Έχουμε διαδοχικά:

$$|z_1+z_2|^2 \le (1+\lambda)|z_1|^2+(1+\frac{1}{\lambda})|z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2) \le (1+\lambda)z_1\overline{z}_1+(1+\frac{1}{\lambda})z_2\overline{z}_2 \Leftrightarrow$$

$$z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2 \le z_1\overline{z}_1+\lambda z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2+\frac{1}{\lambda}z_2\overline{z}_2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1 \le \lambda z_1\overline{z}_1+\frac{1}{\lambda}z_2\overline{z}_2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda z_1\overline{z}_1+\frac{1}{\lambda}z_2\overline{z}_2-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1 \ge 0 \Leftrightarrow z_1(\lambda\overline{z}_1-\overline{z}_2)+z_2(\frac{1}{\lambda}\overline{z}_2-\overline{z}_1) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$z_1(\lambda\overline{z}_1-\overline{z}_2)+\frac{1}{\lambda}z_2(\overline{z}_2-\lambda\overline{z}_1) \ge 0 \Leftrightarrow z_1(\lambda\overline{z}_1-\overline{z}_2)-\frac{1}{\lambda}z_2(\lambda\overline{z}_1-\overline{z}_2) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda\overline{z}_1-\overline{z}_2)(z_1-\frac{1}{\lambda}z_2) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}(\lambda\overline{z}_1-\overline{z}_2)(\lambda z_1-z_2) \ge 0 \Leftrightarrow (\lambda\overline{z}_1-\overline{z}_2)(\lambda z_1-z_2) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$\overline{(\lambda z_1-z_2)}(\lambda z_1-z_2) \ge 0 \Leftrightarrow |\lambda z_1-z_2|^2 \ge 0$, που ισχύει.

➢ ΜΕΓΙΣΤΑ & ΕΛΑΧΙΣΤΑ

15. Αν $|z-6+i|=3$ να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z-3+5i|$ καθώς και οι αντίστοιχοι μιγαδικοί z.

<u>Λύση:</u>

Έχουμε ότι:

$$|z-3+5i|=|z-3-3+i+4i+3|=|z-6+i+4i+3|$$

Από την τριγωνική ανισότητα ($||z_1|-|z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1|+|z_2|$) έχουμε:

$$||z-6+i|-|4i+3|| \le |z-6+i+4i+3| \le |z-6+i|+|4i+3| \Leftrightarrow$$

$$|3-\sqrt{25}| \le |z-6+i+4i+3| \le 3+\sqrt{25} \Leftrightarrow |3-5| \le |z-6+i+4i+3| \le 3+5 \Leftrightarrow$$

$$2 \le |z-6+i+4i+3| \le 8 \Leftrightarrow 2 \le |z-3+5i| \le 8$$

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του z που καθιστούν ελάχιστη ή μέγιστη την ζητούμενη παράσταση πρέπει να λύσουμε τα παρακάτω συστήματα:

$$\left\{\begin{matrix} |z-6+i|=3 \\ |z-3+5i|=2 \end{matrix}\right\} \quad \text{και} \quad \left\{\begin{matrix} |z-6+i|=3 \\ |z-3+5i|=8 \end{matrix}\right\}$$

16. Αν $z \in \mathbb{C}$, ώστε $|z-3i|=2$, τότε να δείξετε ότι: $1 \le |z| \le 5$.

<u>Λύση:</u>

❖ Α τρόπος

$|z-3i|=|z+(-3i)|$ οπότε με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας έχουμε:

$$\big||z|-|-3i|\big| \le |z+(-3i)| \le |z|+|-3i| \Leftrightarrow \big||z|-3\big| \le |z+(-3i)| \le |z|+3 \Leftrightarrow$$

$$\big||z|-3\big| \le 2 \le |z|+3 \Leftrightarrow \ |z|+3 \ge 2 \ (1) \text{ και } \big||z|-3\big| \le 2 \ (2)$$

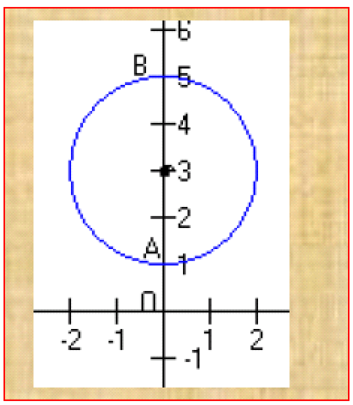
Από την (1) έχουμε $|z| \ge -1$, που ισχύει.

Από την (2) έχουμε $-2 \le |z|-3 \le 2 \Leftrightarrow 3-2 \le |z| \le 3+2 \Leftrightarrow 1 \le |z| \le 5$

❖ Β τρόπος

Ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που ικανοποιούν τη σχέση $|z-3i|=2$ είναι κύκλος κέντρου (0,3) και ακτίνας ρ=2, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι ο μιγαδικός που έχει το ελάχιστο μέτρο είναι αυτός του οποίου η εικόνα είναι το Α(0,1) δηλαδή ο $z=0+i \Rightarrow |z|=1$. Ο μιγαδικός με το μέγιστο μέτρο είναι αυτός που έχει εικόνα το Β(0,5) δηλαδή ο $z=0+5i \Rightarrow |z|=5$.

Άρα για κάθε μιγαδικό του κύκλου έχουμε $1 \le |z| \le 5$.



17. Δίνονται οι μιγαδικοί z,w για τους οποίους ισχύουν:

$$|z-3-4i|\leq 5 \quad \text{και} \quad |w-6-8i|\leq 10$$

Α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z,w.

Β. Να βρείτε το μέγιστο μέτρο των z,w.

Γ. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

Δ. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς για τους οποίους το $|z-w|$ γίνεται μέγιστο και ελάχιστο.

<u>Λύση:</u>

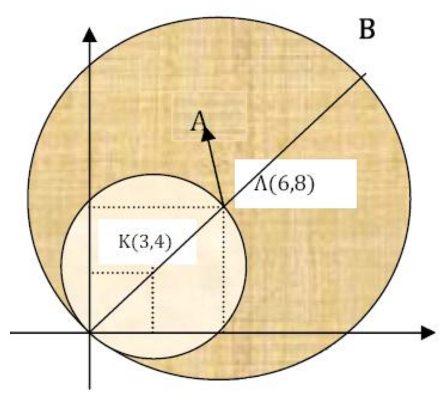
Α. Έστω ότι: $z=x+yi$ και $w=\alpha+\beta i$.

Έχουμε ότι: $|z-3-4i|\leq 5 \Leftrightarrow |z-(3+4i)|\leq 5$

Άρα οι εικόνες των z είναι τα σημεία του κυκλικού δίσκου με κέντρο Κ(3,4) και ακτίνα ρ=5 και η εξίσωση του κύκλου είναι: $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

Αντίστοιχα έχουμε: $|w-6-8i|\leq 10 \Leftrightarrow |w-(6+8i)|\leq 10$

Επομένως οι εικόνες του w είναι τα σημεία του κυκλικού δίσκου κέντρου Λ(6,8) και ακτίνας ρ΄=10 και η εξίσωση του κύκλου είναι: $(\alpha-6)^2+(\beta-8)^2=100$



Β. Η ευθεία ΟΚ έχει εξίσωση $y=\frac{4}{3}x$. Για να βρούμε το μέγιστο $|z|$ φέρνουμε την ΟΚ που τέμνει τον κύκλο κέντρου Κ στο Α (→ Το Α συμπίπτει με το Λ). Τότε το μέγιστο μέτρο είναι $|z|_{\max}$=ΟΚ+ΚΑ=2ρ=10.

Αντίστοιχα το μέγιστο μέτρο $|w|$ είναι $|w|_{\max}$ = 2ρ΄=20

Γ. Το μέγιστο $|z-w|$ είναι $|z-w|_{\max}$=ΟΒ=20

Το ελάχιστο $|z-w|$ είναι $|z-w|_{\min}$=0

Δ. Για να βρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς για τους οποίους το $|z-w|$ γίνεται μέγιστο πρέπει να βρούμε τους μιγαδικούς που έχουν εικόνες το Ο και το Β. Ο μιγαδικός που έχει εικόνα το Ο είναι ο $0+0i$ ενώ για τον μιγαδικό που έχει εικόνα το Β πρέπει να λύσουμε το σύστημα: $\begin{cases} y=\frac{4}{3}x \\ (x-6)^2+(y-8)^2=100 \end{cases}$

Κάνουμε τις απαραίτητες πράξεις:

$$(x-6)^2+(\frac{4}{3}x-8)^2=100 \Leftrightarrow x^2-12x+36+\frac{16}{9}x^2-\frac{64}{3}x+64=100 \Leftrightarrow$$

$$x^2-12x+\frac{16}{9}x^2-\frac{64}{3}x+100=100 \Leftrightarrow x^2-12x+\frac{16}{9}x^2-\frac{64}{3}x=0 \Leftrightarrow$$

$$9x^2-108x+16x^2-192x=0 \Leftrightarrow 25x^2-300x=0 \Leftrightarrow 25x(x-12)=0 \Leftrightarrow$$

$x=0$ ή $x=12$

Για $x=0$ είναι $y=0$, ενώ για $x=12$ είναι $y=\frac{4}{3}\cdot 12=16$

Επομένως ο ένας είναι ο $0+0i$ και ο άλλος είναι ο $12+16i$.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Αν $z=\sqrt{2}-5i$ και $w=1+3i$ τότε να υπολογίσετε τις παρακάτω ποσότητες:

Α. $z+w$

Β. $z-w$

Γ. zw

Δ. $\frac{z}{w}$

(Απ. Α. $\sqrt{2}+1-2i$, Β. $\sqrt{2}-1-8i$, Γ. $\sqrt{2}+15+(3\sqrt{2}-5)i$, Δ. $\frac{\sqrt{2}-15}{10}-\frac{3\sqrt{2}+5}{10}i$)

2. Να βρείτε το μέτρο των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

Α. $z_1=1-2i$

Β. $z_2=-3$

Γ. $z_3=3i$

Δ. $z_4=\frac{1+2i}{(1-i)(2+3i)}$

(Απ. Α. $|z_1|=\sqrt{5}$, Β. $|z_2|=3$, Γ. $|z_3|=3$, Δ. $|z_4|=\sqrt{\frac{5}{26}}$)

3. Στις περιπτώσεις που ακολουθούν να κάνετε τις απαραίτητες πράξεις και να γράψετε το αποτέλεσμα στη μορφή $x+yi$.

Α. $z=(1+2i)(1-i)+(2+i)^2+25\left(\dfrac{1+i}{3+4i}\right)$

Β. $w=\dfrac{1+i}{1+3i}+\dfrac{1+3i}{1-3i}$

(Απ. Α. $z=13+4i$, Β. $w=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}i$)

4. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει:

Α. $3x+2y-yi=9-27i$

Β. $2+i=(x^2-3)i+\sqrt{3x^2+x-6}$

(Απ. Α. $(x,y)=(-15,27)$, Β. $x=-2$)

5. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y έτσι ώστε οι z, w να είναι συζυγείς μιγαδικοί.

$$z=x+(2+3i)^2y+38$$

και

$$w=(2x-y)+(1+i)(x-y)$$

(Απ. $(x,y)=(22,-2)$)

6. Να γράψετε τον μιγαδικό που ακολουθεί στη μορφή $x+yi$

$$z=\frac{3+i}{2-i}+\frac{6-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$$

(Απ. $z=\frac{7}{3}+\left(1-\frac{7\sqrt{2}}{3}\right)i$)

7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

Α. $I_1=i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}$

Β. $I_2=\frac{1}{i^{11}}-\frac{1}{i^{41}}+\frac{1}{i^{75}}-\frac{1}{i^{1023}}$

Γ. $I_3=(1+i)^2+2i^{27}$

Δ. $I_4=(1+i)^2+(1-i)^2$

Ε. $I_5=i^3+i^{13}+i^{23}+i^{33}+i^{43}$

(Απ. Α. $I_1=0$, Β. $I_2=2i$, Γ. $I_3=0$, Δ. $I_4=0$, Ε. $I_5=-i$)

8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

Α. $I_1=(1+i)^{104}+(1-i)^{104}$

Β. $I_2=(1+i)^3+(1-i)^3$

(Απ. Α. $I_1=2^{53}$, Β. $I_2=-4$)

9. Να βρείτε τον μιγαδικό για τον οποίο ισχύει ότι:

$$(2+i)\overline{z}+z=3+i$$

(Απ. $z=1$)

10. Να βρείτε τον μιγαδικό για τον οποίο ισχύει ότι:

$$4z^2+8|z|^2-3=0$$

(Απ. $z=\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ή $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z=\frac{1}{2}$ ή $z=-\frac{1}{2}$)

11. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $iw+2=|w|+3i$

Β. $|w|-iw=1-2i$

(Απ. Α. $w=3-\frac{5}{4}i$, Β. $w=2-\frac{3}{2}i$)

12. Να λύσετε το παρακάτω σύστημα:

$iz+w=2+i$

$w+z=4+2i$

(Απ. $z=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$, $w=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i$)

13. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

Α. $(x+yi)^{10}+(y-xi)^{10}=0$

Β. $(1+i)^{20}+(1-i)^{20}=-2^{11}$

14. Να αποδείξετε ότι

Α. $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$

Β. $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

15. Έστω ότι $w=-z^2+3iz$ και $z=x+yi$. Να εκφράσετε το $|w|^2$ σαν συνάρτηση των x, y.

(Απ. $|w|^2=x^4+y^4+2x^2y^2-6x^2y-6y^3+9x^2+9y^2$)

16. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε να αποδείξετε ότι ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

<u>Υπόδειξη:</u> Να χρησιμοποιήσετε την ιδιότητα των μιγαδικών αριθμών: $|z|^2=z\overline{z}$.

17. Έστω ο μιγαδικός αριθμός w για τον οποίο ισχύει $|w-5|=\sqrt{2}|w-3|$.

Να αποδείξετε ότι θα ισχύει και $|w-1|=2\sqrt{2}$

18. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σωστό ή Λάθος.

Α. $|z|^2 = z\overline{z}$

Β. $|z^2| = z^2$

Γ. $|z| = -|\overline{z}|$

Δ. $|z| = |\overline{z}|$

Ε. $|i\overline{z}| = |z|$

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2001

(Απ. Α. Σωστό, Β. Λάθος, Γ. Λάθος, Δ. Σωστό, Ε. Σωστό)

19. Αν $z_1 = 3+4i$ και $z_2 = 1-\sqrt{3}i$ να κάνετε την αντιστοίχιση στον πίνακα που ακολουθεί.

Στήλη Α		**Στήλη Β**	
1.	$\lvert z_1 \cdot z_2 \rvert$	**α.**	4
2.	$\lvert z_1^2 \rvert$	**β.**	2
3.	$\lvert z_2 \rvert^2$	**γ.**	25
4.	$-\lvert \overline{z_1} \rvert$	**δ.**	−5
5.	$\lvert i z_2 \rvert$	**ε.**	−2
		στ.	5
		ζ.	10

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2001

(Απ. 1. → ζ, 2. → γ, 3. → α, 4. → δ, 5. → β)

20. Αν ισχύουν τα παρακάτω:

$$w = \frac{z+\alpha i}{iz+\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}^* \quad \text{και} \quad z \neq \alpha i$$

τότε:

Α. να αποδειχθεί ότι ο w είναι φανταστικός αριθμός αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός αριθμός.

Β. να αποδειχθεί ότι ισχύει $|w| = 1$ αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός αριθμός.

<u>Υπόδειξη:</u> Ισχύει από τη θεωρία ότι:

1. Αν $z = \overline{z}$ τότε $z \in \mathbb{R}$ και αντίστροφα

2. Αν $z = -\overline{z}$ τότε $z \in \mathrm{I}$ και αντίστροφα

21. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$$

Α. Δείξτε ότι: $\overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$

Β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός

Γ. Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \dfrac{1}{3}|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2005

22. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση:

$$h(z) = \frac{(z+4)i - 2}{z - i}, \text{ όπου } z \text{ μιγαδικός με } z \neq i$$

Αν $x = z - i$ και $y = h(z) - i$ τότε

Α. Να δείξετε ότι $xy = -3 + 4i$

Β. Να βρείτε το x αν είναι γνωστό ότι $x = y$.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $h(z) = 1 - i$

(Απ. Β. $x = y = 1 + 2i$ ή $x = y = -1 - 2i$, Γ. $z = -\dfrac{11}{5} + \dfrac{3}{5}i$)

23. Έστω ότι ισχύουν τα παρακάτω:

$$z = x + yi, z \neq 0 \text{ και } w = \frac{z}{\bar{z}}$$

Να δείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων.

(Απ. Η εικόνα του w κινείται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=1)

24. Να παραστήσετε γραφικά το σύνολο των τιμών του μιγαδικού z για τις οποίες ισχύει ότι:

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$$

(Απ. $(x+5)^2 + y^2 = 16$, κύκλος με κέντρο (-5,0) και ακτίνα 4)

25. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w για τους οποίους ισχύει ότι:

Α. $\mathrm{Re}(w + \frac{1}{w}) = 5\,\mathrm{Re}(w)$

Β. $\mathrm{Im}(w + \frac{1}{w}) = -3\,\mathrm{Im}(w)$

(Απ. Α. Κύκλος με κέντρο το (0,0) και ακτίνα ρ=$\frac{1}{2}$, Β. Κύκλος με κέντρο το (0,0) και ακτίνα ρ=$\frac{1}{2}$)

26. Έστω ότι $w = x + yi$ με $y \neq 0$ και α σταθερός πραγματικός αριθμός με $\alpha \neq 0$.

Να κάνετε τις αντιστοιχίσεις στον πίνακα που ακολουθεί.

Σχέση που ικανοποιεί ο w	Γεωμετρικός τόπος του w
$\mathrm{Im}(w) = \alpha$	$y = \frac{\alpha}{x}$
$\mathrm{Re}(w) = \alpha$	$y = \frac{1}{\alpha}x$
$\mathrm{Re}(w) \cdot \mathrm{Im}(w) = \alpha$	$x = \alpha$
$\frac{\mathrm{Re}(w)}{\mathrm{Im}(w)} = \alpha$	$y = \alpha$

27. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w και w_1 τέτοιους ώστε $w = z - zi$ και $w_1 = \frac{1}{\alpha} + \alpha i, \alpha \in \mathbb{R}^*$.

Να δείξετε ότι, αν το α μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $w = \bar{w}_1$, τότε η εικόνα του P του z στο μιγαδικό επίπεδο, κινείται σε μια υπερβολή.

Πανελλαδικές Εξετάσεις 1994

(Απ. Η εικόνα του z κινείται στην υπερβολή με εξίσωση: $x^2 - y^2 = 1$)

28. Δίνεται ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$w = 2x - 3 + (2y - 1)i \text{, όπου } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x, y) με $|2w + 3i - 1| = 3$ είναι κύκλος.

(Απ. Κύκλος με κέντρο ($\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}$) και ακτίνα ρ=$\frac{3}{4}$)

29. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, k με $k = z \cdot w$.

Α. Αν ισχύει ότι $|\overline{w} + z| = |\overline{z} - w|$ (1) τότε να δείξετε ότι ο k είναι φανταστικός αριθμός.

Β. Αν ακόμα ισχύει ότι $w = 2 + i$ τότε να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Υψώστε στο τετράγωνο την (1) και κατόπιν χρησιμοποιήστε την ιδιότητα των μιγαδικών αριθμών: $|z|^2 = z\overline{z}$. Αρκεί να δείξετε ότι: $\overline{k} = -k$

(Απ. Β. Ευθεία με εξίσωση: $y = 2x$)

30. Δίνεται η παρακάτω σχέση:

$$h(z) = -\frac{(12 + 2z)i - 5}{z - 2i}, z \neq 2i$$

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στην περίπτωση που ο $h(z)$ είναι πραγματικός.

(Απ. Κύκλος με κέντρο $(-3, -\frac{1}{4})$ και ακτίνα $\rho = \frac{15}{4}$)

31. Έστω ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$f(z)=\frac{\overline{z}i+1}{\overline{z}},\, z\neq 0$$

Α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=\left[\, f(1)\right]^{2010}$ είναι φανταστικός.

Β. Να βρείτε την εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο του z για την οποία ισχύει ότι

$$\left|\, f(z)\right|=1$$

(Απ. Β. Ευθεία με εξίσωση: $y=-\frac{1}{2}$)

32. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\left|\mathrm{Re}(z)\right|+\left|\mathrm{Im}(z)\right|\leq\sqrt{2}\left|z\right|$$

33. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\left|z\right|\leq\left|\mathrm{Re}(z)\right|+\left|\mathrm{Im}(z)\right|$$

34. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\left|z-2i\right|<\left|z+2i\right|\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)>0$$

35. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$\left|(i+2\sqrt{2})z\right| = 6$$

και

$$\left|w-(1-i)\right| = \left|w-(3-3i)\right|$$

τότε να βρείτε:

Α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

Β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

Γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2008

<u>Υπόδειξη:</u> Δ. Για να λύσετε το ερώτημα αυτό πρέπει να χρησιμοποιήσετε την παρακάτω ιδιότητα των μιγαδικών αριθμών:

$$|z-w| \geq \left||z|-|w|\right|$$

(Απ. Α. Κύκλος με κέντρο (0,0) και ακτίνα ρ=2,

Β. Ευθεία με εξίσωση: $x-y=4$, Γ. $2\sqrt{2}$, Δ. $2\sqrt{2}-2$)

36. Έστω ότι για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$(w-2i)^4 = 81(w+2i)^4$$

Α. Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών w βρίσκονται πάνω σε κύκλο.

Β. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

<u>Υπόδειξη:</u> Ισχύει ότι: $(w-2i)^4 = 81(w+2i)^4 \Leftrightarrow \left|(w-2i)^4\right| = \left|81(w+2i)^4\right|$

$\Leftrightarrow \left|(w-2i)\right|^4 = \left|3(w+2i)\right|^4 \Leftrightarrow \left|(w-2i)\right|^2 = \left|3(w+2i)\right|^2 \Leftrightarrow$ ....

(Απ. Α. Κύκλος με κέντρο $(0,-\frac{5}{2})$ και ακτίνα $\rho = \frac{3}{2}$, Β. $|w|_{\mu\varepsilon\gamma.} = 4$, $|w|_{\varepsilon\lambda.} = 1$)

37. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

Α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1.

Β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z = \frac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}$$

για $\alpha = 0$ και για $\alpha = 2$ αντίστοιχα.

Ι. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.

ΙΙ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2007

(Απ. Β. Ι. $\sqrt{2}$)

38. Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu} \cdot z, \nu \in \mathbb{N}^*$.

Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2002

39. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = 1 - 2i$$

και

$$z_2 = 3 + 4i$$

Α. Αν $\dfrac{z_2}{z_1} = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x = -1$ και $y = 2$.

Β. Αν μια ρίζα της εξίσωσης

$$x^2 + \beta x + 2\gamma = 0, \text{ όπου } \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

είναι η $\dfrac{z_2}{z_1}$, να βρείτε τις τιμές των β και γ.

Γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίου ισχύει

$$|z - 2z_1| = |z_2|$$

Εξετάσεις Ελλήνων του Εξωτερικού 2002

(Απ. Β. $\beta = 2, \gamma = \dfrac{5}{2}$, Γ. Κύκλος με κέντρο (2,-4) και ακτίνα ρ=5)

40. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = i, z_2 = 1$ και $z_3 = 1 + i$.

Α. Να αποδείξετε ότι:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2.$$

Β. Αν για το μιγαδικό z ισχύει

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

τότε να αποδείξετε ότι:

Ι. $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$.

ΙΙ. Για $z \neq 0$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}$$

Εξετάσεις Ελλήνων του Εξωτερικού 2007

(Απ. Β. ΙΙ. $A = 0$)

41. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (\lambda - 2) + 2\lambda i$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

Β. Αν ισχύει $z + \overline{z} = 2$ να βρείτε το $\mathrm{Re}(\frac{1}{z})$.

Γ. Αν $|z| = 2$ και $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, να βρείτε το λ.

Πανελλαδικές Εξετάσεις Εσπερινών Λυκείων 2007

(Απ. Α. Ευθεία με εξίσωση: $y = 2x + 4$, Β. $\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{1}{37}$, Γ. $\lambda = \frac{4}{5}$)

42. Δίνεται η εξίσωση

$$3z^2+\lambda z+\mu=0,\text{ όπου } \lambda,\mu \text{ είναι πραγματικοί αριθμοί}$$

Α. Αν ο αριθμός $z_1=1+i$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι

$$\lambda=-6,\mu=6$$

και να βρείτε τη δεύτερη ρίζα z_2 της εξίσωσης.

Β. Να αποδείξετε ότι:

Ι. $z_1^2+z_2^2=0$

ΙΙ. $z_1^{2008}+z_2^{2008}=2^{1005}$

Πανελλαδικές Εξετάσεις Εσπερινών Λυκείων 2008

(Απ. Α. $z_2=1-i$)

43. Α. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\kappa+(\kappa+1)i,\kappa\in\mathbb{R}$.

Ι. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία

$$y=x+1$$

ΙΙ. Ποιοι από αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς έχουν $|z|=1$;

Β. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει

$$\alpha^2+\beta^2+8=(1-i)^4\beta-(1+i)^4\alpha$$

να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=-2$.

Εξετάσεις Ελλήνων του Εξωτερικού 2008

(Απ. Α. ΙΙ. $z=i$ ή $z=-1$)

44. Έστω z μιγαδικός αριθμός, με $z \neq \pm i$ και $w = \dfrac{z}{z^2+1}$.

Α. Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$.

Β. Να λύσετε, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Γ. Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (Β), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{(z_1 \cdot z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2}$$

Εξετάσεις Ελλήνων του Εξωτερικού 2004

(Απ. Β. $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ ή $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$, Γ. $K = \dfrac{1-i}{7}$)

45. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2 i = \alpha + (1-\alpha)i$$

Να αποδείξετε ότι:

Α. αν $\mathrm{Im}(z) = 0$, τότε $\alpha = 1$,

Β. αν $\alpha = 0$, τότε $z^2 + 1 = 0$,

Γ. για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει: $0 \le \alpha \le 1$,

Δ. οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Πανελλαδικές Εξετάσεις Εσπερινών Λυκείων 2004

(Απ. Δ. Κύκλος με κέντρο (0,0) και ακτίνα ρ=1)

46. Αν $z \in \mathbb{C}^*$ με $z+\frac{1}{z}=-1$, να αποδείξετε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

Α. $3z^{2007}+\frac{2}{z^{2007}}=5$ Β. $z^{2008}+\frac{1}{z^{2008}}=-1$

<u>Υπόδειξη:</u> Για να αποδείξετε το ζητούμενο να χρησιμοποιήσετε τον παρακάτω μετασχηματισμό:

$$z+\frac{1}{z}=-1 \Leftrightarrow z^2+z+1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0$$

$$\Leftrightarrow z^3-1=0 \Leftrightarrow z^3=1$$

47. Αν Μ$_1$ και Μ$_2$ είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντίστοιχα και ισχύει ότι $z_2=z_1+\frac{4}{z_1}$ τότε να αποδείξετε ότι:

Όταν το Μ$_1$ κινείται σε ένα κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα 4 τότε το Μ$_2$ κινείται σε μια έλλειψη.

(Απ. Έλλειψη με εξίσωση: $\frac{x_2^2}{25}+\frac{y_2^2}{9}=1$)

48. Έστω ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει σε κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού:

$$w=1-\frac{1}{z}$$

<u>Υπόδειξη:</u> Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα αν λύσετε την παραπάνω σχέση ως προς z και χρησιμοποιήσετε το δεδομένο της άσκησης: $|z|=1$.

(Απ. Κύκλος με κέντρο (1,0) και ακτίνα ρ=1)

49. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$iw\overline{z} + 6w = 2i + 3z$$

Αν η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας ρ=2 τότε:

Α. να δείξετε ότι η εικόνα του w ανήκει σε ομόκεντρο κύκλο ακτίνας 1,

Β. να υπολογίσετε το $|z - w|$.

<u>Υπόδειξη:</u> Β. Ισχύει ότι: $|z - w| = |w - z|$

(Απ. Β. $|z - w| = 1$)

50. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

I. $z^4 + 10z^2 + 9 = 0$

II. $8z^4 - 8z^3 + z - 1 = 0$

(Απ. I. $z = \pm i$ ή $z = \pm 3i$, II. $z = 1$ ή $z = -\frac{1}{2}$ ή $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4}$)

51. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύουν

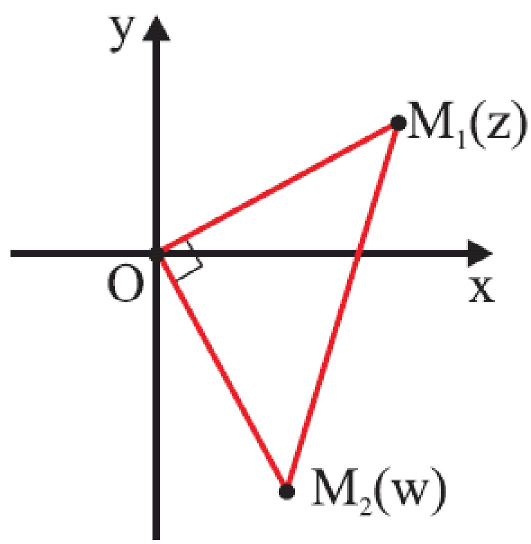
$$(zi + \sqrt{3}\overline{z}) \in \mathbb{R} \text{ και } |z| = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

$$z^{12} = 1$$

52. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z \neq 0$, $w = \frac{1}{z}$ τέτοιοι ώστε οι εικόνες των z και w σχηματίζουν με την αρχή των αξόνων Ο, ορθογώνιο τρίγωνο στο Ο.

Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι οι διχοτόμοι των αξόνων χωρίς το σημείο τομής τους.



Υπόδειξη: Ισχύει ότι:

$$\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Υπενθύμιση: Ο συντελεστής διεύθυνσης λ ενός διανύσματος έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$ δίνεται από τον τύπο: $\lambda = \frac{y}{x}$.

53. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$(1-i)^8 + (1+i)^8 = \alpha + \beta i$$

(Απ. $\alpha = 2^5$, $\beta = 0$)

54. Έστω ότι $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$|z|\sqrt{2} \geq |x| + |y|$$

55. Έστω η παρακάτω ισότητα:

$$x^3 \lambda i^{18} - y\lambda = 2x^2\lambda + 1 + (\lambda x - 1)i^{21} \text{ με } \lambda, x, y \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $z = x + yi$.

(Απ. Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το διάγραμμα της συνάρτησης:

$y(x) = -x^3 - 2x^2 - x$)

56. Αρχικά να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|z-3|$, όταν ισχύει ότι $|z+4i| \leq 1$ και στη συνέχεια να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z, όταν το $|z-3|$ είναι ίσο με το μέγιστό του.

<u>Υπόδειξη:</u> Να χρησιμοποιήσετε την ιδιότητα: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(Απ. $|z-3| \leq 6$, Κύκλος με κέντρο το (3,0) και ακτίνα 6)

57. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z(t)=\dfrac{1}{2+it}, t\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

Α. $z(t)+\overline{z}(t)=4z(t)\cdot\overline{z}(t)$

Β. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $\mathrm{K}(\frac{1}{4},0)$ και ακτίνα $\rho=\frac{1}{4}$.

Γ. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ και $z(-\frac{4}{t}), t\in\mathbb{R}^*$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του προηγούμενου κύκλου.

Δ. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1), z(-4)$ και $z(2010)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

<u>Υπόδειξη:</u> Γ. Αρκεί να δείξετε ότι: $\left|z(t)-z(-\frac{4}{t})\right|=2\rho=\frac{1}{2}$

Δ. Σύμφωνα με το ερώτημα Γ. τα $z(1), z(-4)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία και επομένως οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1), z(-4)$ και $z(2010)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τις εικόνες των $z(1), z(-4)$.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

Επαναληπτικά Θέματα

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ Λυκείου 2010

58. Αν z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης $z^3+3z+5=0$ τότε να δείξετε ότι $|z_1|>1$.

<u>Υπόδειξη:</u> Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας και <u>απαγωγή σε άτοπο</u> (Αρχική υπόθεση: Έστω $|z_1|\le 1$).

59. Έστω ότι z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $z^2+4z+8=0$.

Να αποδείξετε ότι ο $w=\dfrac{z_1+z_2+4i}{z_1 z_2+8i}$ είναι φανταστικός αριθμός.

60. Έστω ο μιγαδικός $z=\lambda(1+i)+1-i, \lambda\in\mathbb{R}$.

Α. Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκει η εικόνα του z.

Β. Για ποια τιμή του λ, το $|z|$ γίνεται ελάχιστο;

Γ. Υποθέτουμε ότι $\lambda>0$. Αν $|z|=2\sqrt{2}$ και $w=\dfrac{z}{\sqrt{3}-i}$ τότε:

Ι. Να αποδείξετε ότι $\lambda=\sqrt{3}$.

ΙΙ. Να βρείτε τις τιμές του θετικού ακέραιου αριθμού ν, ώστε $w^{2\nu}\in\mathbb{R}$.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

Επαναληπτικά Θέματα

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ Λυκείου 2010

(Απ. Α. $y=x-2$, Β. $\lambda=0$, Γ. ΙΙ. ν άρτιος)

61. Έστω ότι ισχύει η σχέση:

$$|z-2-2i|+|z-2|^{\alpha+1}=6-10\alpha \text{ με } \alpha\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z για $\alpha=-1$.

(Απ. Κύκλος με κέντρο (2,2) και ακτίνα ρ=4)

62. Δίνεται ο παρακάτω μιγαδικός αριθμός:

$$z=\alpha+i(\frac{\ln\alpha}{\alpha}+1-\alpha),\alpha>0$$

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

(Απ. Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το διάγραμμα της συνάρτησης:

$y(x)=\frac{\ln x}{x}+1-x, x>0$)

63. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z με $z\neq 0$.

Α. να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z,-z$ και $iz\sqrt{3}$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

Β. Στην περίπτωση που το εμβαδόν του ισοπλεύρου είναι ίσο με $\sqrt{3}$, τότε να υπολογίσετε το μέτρο του z.

(Απ. Β. $|z|=1$)

64. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z \neq 0$ και $w = \frac{1}{z}$. Οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών z και w είναι κάθετες.

Α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z κινούνται σε δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

Β. Να αποδείξετε ότι $z^4 < 0$.

Γ. Έστω ότι, επιπλέον ισχύει: $\left|\frac{z^2-1}{z}\right| = \sqrt{2}$.

Ι. Να αποδείξετε ότι: $|z| = 1$.

ΙΙ. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{Im}\left(\frac{(z+i)^5}{z^5+i}\right) = 0$.

ΙΙΙ. Να βρείτε το μέτρο του $u \in \mathbb{C}$ για τον οποίο ισχύει: $\frac{1}{u} = \frac{3}{\overline{z}} - \frac{4}{(\overline{zi})}$.

<u>Υπόδειξη:</u> Β. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με τη βοήθεια του Α. Ερωτήματος και πράξεις ($z^4 = (x \pm xi)^4 = ... < 0$).

(Απ. Α. Ο γεωμετρικός τόπος είναι οι ευθείες y=x, y=-x (εκτός από την αρχή των αξόνων) που προφανώς είναι κάθετες, Γ. ΙΙΙ. $|u| = \frac{1}{5}$)

65. Δίνονται οι μιγαδικοί για τους οποίους ισχύουν:

$$5(7z+1)^{13}-(3+4i)(z+7)^{13}=0 \text{ και } w=\frac{i}{5}\left(\frac{4}{z}-z\right)$$

Α. Να αποδείξετε ότι $|z|=1$.

Β. Να βρείτε την απόσταση των εικόνων Α, Β των μιγαδικών z και $5iw$ αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο.

<u>Υπόδειξη:</u> Β. Πρόταση: Η απόσταση των εικόνων δύο μιγαδικών ισούται με το μέτρο της διαφοράς τους.

(Απ. Β. $\mathrm{AB}=|z-5iw|=4$)

66. Δίνεται ο μιγαδικός $z=\dfrac{5\lambda+i}{1+\lambda i}$, με λ πραγματικό αριθμό.

Α. Να αποδειχθεί ότι όταν ο z είναι φανταστικός, τότε ισχύει ότι $z^{2011}=-i$.

Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός των σημείων του επιπέδου που είναι οι εικόνες των μιγαδικών z.

Γ. Να βρεθούν οι μιγαδικοί $w^3=-i$.

Δ. Για τους μιγαδικούς u_1,u_2,u_3 έχουμε $u_1\neq u_2\neq u_3\neq u_1$ με $\mathrm{A}(u_1),\mathrm{B}(u_2),\Gamma(u_3)$. Έστω ότι w_o είναι μια μη φανταστική λύση της εξίσωσης του Γ. ερωτήματος με $\dfrac{u_1-u_2}{u_2-u_3}=\dfrac{w_o}{i}$. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

(Απ. Β. Κύκλος με κέντρο Κ(0,-2) και ρ=3, Γ. $w=i$, $w=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$)

67. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w και w_1 τέτοιους ώστε $w = z - zi$ και $w_1 = \frac{1}{\lambda} - \lambda i$ με $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Α. Να δείξετε ότι, αν ο λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει ότι $w = \bar{w}_1$, τότε η εικόνα Ρ του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια υπερβολή.

Β. Να βρεθεί το ελάχιστο μέτρο του μιγαδικού z.

Γ. Αν οι μιγαδικοί z_1 και z_2 κινούνται σε διαφορετικούς κλάδους της υπερβολής τότε να βρεθεί το ελάχιστο του $|z_1 - z_2|$ καθώς και οι z_1 και z_2.

(Απ. Α. $y^2 - x^2 = 1$, Β. $|z|_{\min} = 1$, Γ. $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $|z_1 - z_2|_{\min} = 2$)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πράξεις στο σύνολο των μιγαδικών

Πρόσθεση: $z_1 + z_2 = (\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i$

Πολλαπλασιασμός: $z_1 z_2 = (\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i$

Διαίρεση: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \dfrac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i$

Δυνάμεις μιγαδικών αριθμών

$$i^{\nu} = i^{\upsilon} = ...$$

Αν $\nu = 4\kappa + 0$ τότε $i^{\nu} = i^0 = 1$

Αν $\nu = 4\kappa + 1$ τότε $i^{\nu} = i^1 = i$

Αν $\nu = 4\kappa + 2$ τότε $i^{\nu} = i^2 = -1$

Αν $\nu = 4\kappa + 3$ τότε $i^{\nu} = i^3 = -i$

Ιδιότητες συζυγών

Αν $z = x + yi$ και $\overline{z} = x - yi$ τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$z\overline{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \overline{z} = 2x = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \overline{z} = 2yi = 2\operatorname{Im}(z)i$$

Έστω ότι $z = x + yi$, τότε:

1. Αν $z = \overline{z}$ τότε $z \in \mathbb{R}$ και αντίστροφα

2. Αν $z = -\overline{z}$ τότε $z \in I$ και αντίστροφα

Επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Έστω $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ (1) στο μιγαδικό επίπεδο με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$

Αρχικά υπολογίζουμε την διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Αν $\Delta > 0$ τότε η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες: $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Αν $\Delta = 0$ τότε η (1) έχει μια διπλή πραγματική ρίζα: $z = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$

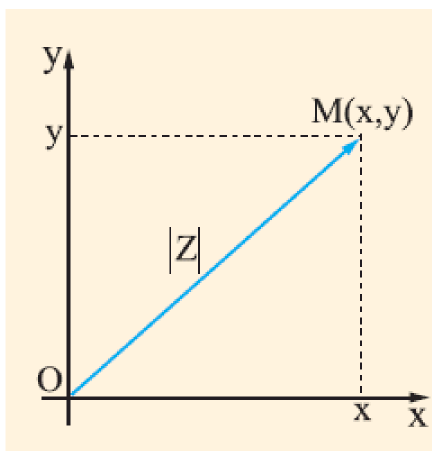
Αν $\Delta < 0$ τότε η (1) έχει δύο ρίζες μιγαδικούς συζυγείς: $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$

Μέτρο μιγαδικών αριθμών

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ και $M(z)$ η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο.

Μέτρο του $z = x + yi$ ονομάζεται η απόσταση του $M(z)$ από την αρχή $\mathrm{O}(0,0)$ των αξόνων.

$$|z| = (\mathrm{OM}) = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Ιδιότητες μέτρου μιγαδικών αριθμών

Έστω ότι $z = x + yi$, τότε:

$$|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$$

$$|z^2| = |z|^2 = z\overline{z}$$

$$|z_1 \cdot z_2 \ldots z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_\nu|$$

$$|z^\nu| = |z|^\nu$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{, με } |z_2| \neq 0$$

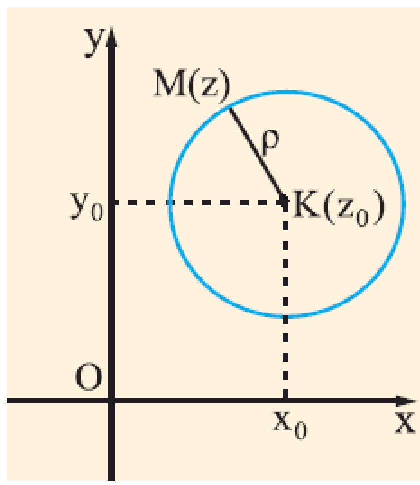
$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_\nu|$$

Εξίσωση κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z_o = x_o + y_o i$ και ένας θετικός πραγματικός αριθμός ρ.

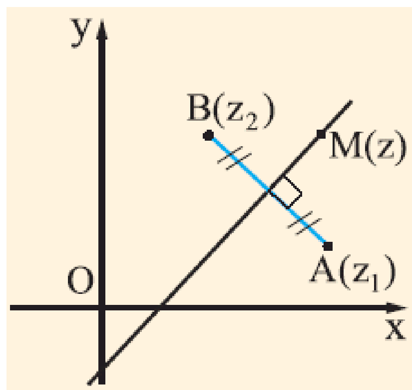
Η εξίσωση $|z - z_o| = \rho$ είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο την εικόνα $\mathrm{K}(x_o, y_o)$ του z_o και ακτίνα ρ.



Εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2.

Η εξίσωση $|z-z_1|=|z-z_2|$ είναι εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος με άκρα τα $\mathrm{A}(z_1)$ και $\mathrm{B}(z_2)$.



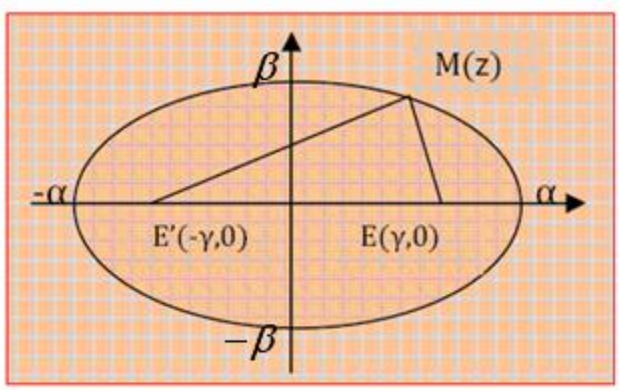
Εξίσωση έλλειψης στο μιγαδικό επίπεδο

Έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του μιγαδικού επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία (εστίες Ε΄, Ε) είναι σταθερό και ισούται με $2\alpha > 2\gamma$.

$$|z+\gamma|+|z-\gamma|=2\alpha$$

Η αναλυτική εξίσωση της έλλειψης είναι:

$\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ και εστίες Ε΄(-γ ,0) και Ε(γ ,0)



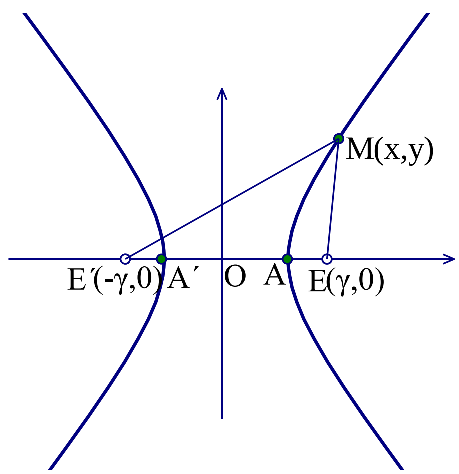
Εξίσωση υπερβολής στο μιγαδικό επίπεδο

Υπερβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του μιγαδικού επιπέδου των οποίων οι αποστάσεις από δύο σταθερά σημεία έχουν απολύτως σταθερή διαφορά. Τα σταθερά σημεία Ε΄ και Ε λέγονται εστίες της υπερβολής. Η απόσταση των εστιών Ε΄ και Ε λέγεται εστιακή απόσταση και συμβολίζεται 2γ, ενώ η σταθερή διαφορά συμβολίζεται 2α<2γ.

$$E'E=2\gamma \text{ και } |ME'-ME|=2\alpha$$

Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες Ε΄(-γ,0) και Ε(γ,0) και σταθερή διαφορά 2α είναι:

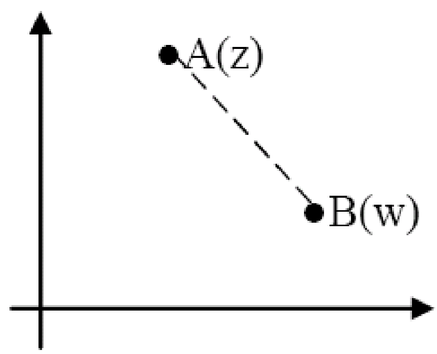
$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \text{ με } \beta^2=\gamma^2-\alpha^2$$



Απόσταση των εικόνων Α, Β δύο μιγαδικών z και w

Η απόσταση ($|\overrightarrow{AB}|$) των εικόνων Α, Β δύο μιγαδικών z και w είναι ίση με $|z-w|$.

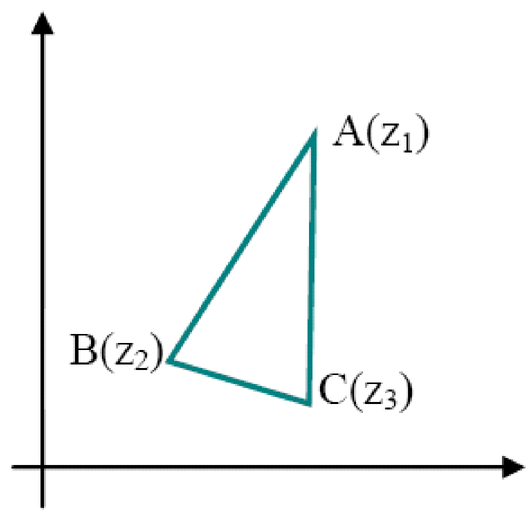
Προσοχή: Η παράσταση $|z+w|$ παριστάνει την απόσταση της εικόνας του z από την εικόνα του –w, διότι: $|z+w|=|z-(-w)|$.



Ισοσκελές και ισόπλευρο τρίγωνο στο μιγαδικό επίπεδο

Το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με κορυφή το A αν ισχύει: $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3|$.

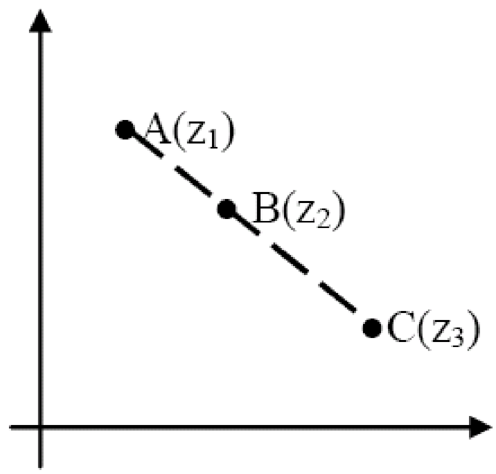
Το τρίγωνο ABC θα ήταν ισόπλευρο αν επιπλέον: $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_3 - z_2|$.



Συνευθειακά σημεία στο μιγαδικό επίπεδο

Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε τρία διαφορετικά ανά δύο σημεία A, B, C εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντιστοίχως να είναι συνευθειακά είναι:

$$\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \in \mathbb{R}$$



Απόδειξη:

Αρκεί να υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow$

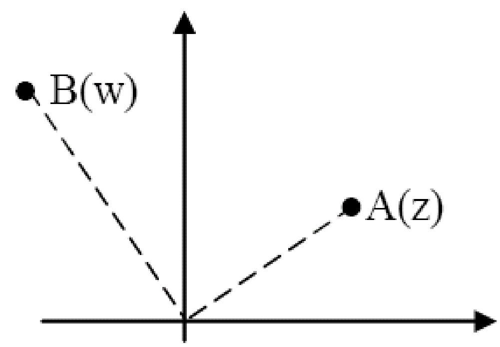
$$\Leftrightarrow z_2 - z_1 = \lambda(z_3 - z_2) \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \lambda \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \in \mathbb{R}$$

→ Αν το B είναι το μέσο του AC με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι: $z_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_3)$

Καθετότητα διανυσματικών ακτίνων στο μιγαδικό επίπεδο

Με προϋπόθεση ότι τα σημεία O, A, B είναι διαφορετικά ανά δύο ισχύει:

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \frac{z}{w} \in I$$

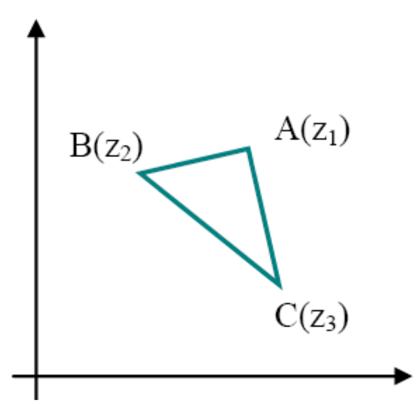


Απόδειξη:

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 = |z-w|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 = (z-w)(\bar{z}-\bar{w})$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 = |z|^2 - z\bar{w} - w\bar{z} + |w|^2 \Leftrightarrow z\bar{w} = -w\bar{z} \Leftrightarrow \left(\frac{\bar{z}}{\bar{w}}\right) = -\frac{z}{w} \Leftrightarrow \frac{z}{w} \in I$$

→ Αντίστοιχα ισχύει ότι: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \in I$



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Μιγαδικοί Αριθμοί – μεθοδολογία: Θετικής & Τεχνολογικής κατεύθυνσης

Γιώργος Α. Καρεκλίδης

2. Άλγεβρα 2 1ης Δέσμης: Κωνικές τομές – Μιγαδικοί – Πιθανότητες

Κ. Γκατζούλης

3. Μιγαδικές Μεταβλητές, McGraw-Hill, New York, ΕΣΠΙ, Αθήνα

Murray R. Spiegel

4. Μιγαδικοί αριθμοί + Εφαρμογές στην Γεωμετρία + μετασχηματισμοί Mobius

Ρ. Μπόρης

5. Μιγαδικές Συναρτήσεις και Εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

R. Churchill & J. Brown

6. Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων Μιας Μεταβλητής, Εκδόσεις Συμμετρία

Στ. Νεγρεπόντη

7. Μαθηματικά Γ1 – Γ΄ Λυκείου – Θετικής & Τεχνολογικής κατεύθυνσης

Βασίλης Παπαδάκης

8. Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία

Σ. Κ. Μερκουράκη & Τ. Ε. Χατζηαφράτη

9. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ Λυκείου

http://www.hms.gr/